数理解析研究所講究録
233巻 1975年 14-23

On Modules for the Linear Fractional Groups

J. L. Alperin
筑波大・理　宮本 泉(訳)

有限群の表現論には、二つの主な問題があります。一つは、Lie 型の群の表現を研究することであり、もう一つは、block theory の結果を拡張することです。才一の問題では、主な仕事は既約表現の決定にあります。しかし、そのためには、自然に起ってくる homological type の疑問や問題のために、他の表現の研究も必要ですし、また、これから明らかにされねばならない構造もあると思います。才二の問題では、次の段階は、abelian defect group をもつ block に対して、cyclic の場合の結果を拡張することでしょう。しかし、それにはどうしても新しい idea が必要です。今までの方法では、うまくいきません。

以上のことから、実例についてよく研究することは、良い考えだと思います。Lie 型の群を考えるのと同時に、abelian Sylow p-subgroup のことも考え合わせてすぐ思いつくのが

$SL(2, p^n)$です。経験から、$p=2$の場合が比較的容易なので、ここでは、$SL(2, 2^n)$の表現を研究しようと思います。

Part I. G: $SL(2, 2^n)$, F: 標数2の代数的閉体, に対する FG-moduleの考察。

1) Irreducible modules
2) Projective modules
3) Irreducibly generated modules

Part II. Conjectures。(Part Iの考察から得られる、abelian defect groupをもつblockについての予想)

Part I. 1) Irreducible modules。

始めに、irred. FG-moduleの作り方を思い出しましょう。V_1を$G=SL(2, 2^n)$が自然に作用するF上2次元のベクトル空間とします。各元を2乗するのは、体FのFrobenius automorphismですから、これをV_1に適用すると、もう一つのirred. module V_2が得られます。このV_2は、V_1に"algebraically conjugate"で、この様にして、V_3, V_4, $\cdots$, V_n ($V_{n+1}=V_1$)と、それぞれ相異なるirred. FG-moduleが作れ

ます。さらに、$N=\{1,2,\cdots,n\}$, $I=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}\subseteq N$ のとき、$V_I=V_{i_1}\otimes\cdots\otimes V_{i_k}$ で定義し、特に $V_\phi=F$ とおきます。これで、各 $I\subseteq N$ に対して、$2^{|I|}$ 次元の irred. FG-module V_I が得られ、これらの 2^n 個の irred. FG-module は互に非同型であり、同型を除いて、これらが G の irred. modules のすべてです。(Steinberg の定理の一例)

2) Projective modules

有限群では、次の1対1対応があります。

$$\begin{array}{ccc} \text{Indecomposable projective modules} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \text{Irreducible modules} \\ P(V) & \longmapsto & V \end{array}$$

unique irred. quotient module of P(V)

このとき、V_I に対応する proj. module (これを V_I の projective cover とよびます)を、P_I と書くと、次の定理が得られます。

定理1 (tensor products)　I を N の空でない真部分集合とすると、

$$P_I \cong V_{N-I}\otimes V_N$$

他の場合は、

$$P_\phi \oplus P_N \cong V_N \otimes V_N$$

もちろん、$P_N = V_N$（次元 2^n の Steinberg module, irred. かつ proj. です）ですが、見やすいように、上の様に書きます。次に、P_I の submodule について考えます。はじめに、composition factor について。

定理2（Cartan Matrix）P_I の composition factor に現われる、V_J の重複度は、

$2^{n-|I \cup J|}$（$i \in N$ に対して、$i \in I \cap J$ かつ $i+1 \notin I \cap J$ ならば、$i+1 \notin I \cup J$ となるとき）

0（他の場合）。

（この定理は $SL(2, p^n)$ では成立しない。）

K_I を、P_I から V_I への準同型の kernel とすると、K_I は、最大の完全可約商 module をもち、V_J は、その直和因子として、$\mathrm{Ext}_{FG}(V_I, V_J)$ の F 上の次元と等しい重複度で含まれています。この次元は、次の定理より得られます。

定理3. $I, J \subseteq N$ とすると、

$$\mathrm{Ext}_{FG}(V_I, V_J) = 0$$

ただし、次の場合を除く。

a) $|I \cap J| + 1 = |I \cup J| < n$ 、かつ、

b) $i \in I \cup J$ かつ、$i \notin I \cap J$ ならば、$i-1 \notin I \cup J$ 。

このときは

$$\mathrm{Ext}_{FG}(V_I, V_J) = F$$

3) *Irreducibly generated modules.*

Irred. gen. module を、次の通りに定義します。I, $J \subseteq N$, $I \subseteq J$ のとき、$V_{I,J} = V_I \otimes V_J$ 。ただし、$I = J = N$ のときは、$V_{N,N} = P_\phi$ 。従って、$V_N \otimes V_N \cong V_{N,N} \oplus V_N$。特に、$I = \phi$ ならば、$V_{\phi,J} = V_J$、$J = N$ ならば $V_{I,J} = P_{N-J}$ となります。

主定理

a) 3^n 個の $V_{I,J}$ は、*indecomp.* かつ、互に非同型。

b) 各 $V_{I,J}$ は、唯一の *irred. quotient module* と、唯一の *irred. submodule* をもつ。

c) これら *irreducibly generated modules* の任意の2個の tensor 積は、また *irred. gen. modules* の直和に

同型となる。

d) $V_{I,J}$ の同型類によって張られる Green ring の subring は、半単純となる。

(注) Green ring: indecomp. FG-module の同型類からなる $\mathbb{Z}$ 上の basis をもつ。積は次の様に定義する。U, V を indecomp. FG-module、$[U]$, $[V]$ を対応する Green ring の元とする。このとき、

$$[U]\cdot[V] = [U_1] + \cdots\cdots + [U_r]$$

ただし、$U_1, \cdots, U_r$ は indecomp. FG-module、かつ $U \otimes V = U_1 \oplus \cdots\cdots \oplus U_r$ を満たすとする。従って、定理は、$[U_{I,J}]$ が Green ring の半単純な subring を張ることを主張している。

証明の概略. $V_{N,N}$ を除き、$V_{I,J} = V_1^{e_1} \cdot \cdots \cdot V_n^{e_n}$ (tensor 積)、ただし、

$$e_i = \begin{cases} 0 & i \notin J \\ 1 & i \in J,\ i \notin I \\ 2 & i \in I \end{cases}$$

これによって、3^n 個の $V_{I,J}$ が得られます。a), b) の残りの部分は簡単です。c) は次の key remark によります。

Lemma $V_i \otimes V_i \otimes V_i \cong V_i \oplus V_i \oplus V_{\{i,\, i+1\}}$

次に、問題のGreen ringのsubringは、$x_i = [V_i]$, $i \in N$, で生成され、基本関係は、$x_i^3 = 2x_i + x_i x_{i+1}$, $i \in N$, で得られます。このsubringの半単純性は、このringから複素数体への、"十分"な準同型写像を見つけることによって証明されます。

結論: V_Iを irred FG-module とする。V_Iの tensor power の直和因子として現われる indec. module の同型類は、有限個しかない。

この結論は、GのSylow 2-subgroupがabel群であったことに起因すると思われます。GをLie型の群と仮定しましたが、例えば、$GL(3,2)$の普通の3次元moduleは上の様な性質をもちません。

Part II.

上に得られた結論より、ここで私が強調したい構造に到達します。一般に、Gを有限群とし、Fを体とします。

定義：FG-module U が algebraic とは、Part I の「結論」を満足すること。

Lemma。 次の a), b) は同値

a) FG-module U は algebraic。

b) U に対応する Green ring の元 u が algebraic, つまり、$\exists p \in \mathbb{Z}[X]$, $p \neq 0$ s.t. $p(u)=0$。

証明。略。(routine work)

algebraic な FG-module を、G の subgroup に制限したものは algebraic となることは明らかです。関連して、次の事実は大変便利です。

Lemma $G \supseteq H$ subgroup, W: algebraic FH-module とすると、誘導表現 W^G は algebraic FG-module となる。

証明は定義に従い、Mackey の定理を使い、H の order に関する induction を行います。簡単ですが、十分注意を払う必要があります。

Conjecture (First Form) G:有限群。F:標数 p の体。G の Sylow p-subgroup が abelian ならば、すべての irred. FG-module は algebraic。

Conjecture (Second Form) G, F:上に同じ。B を abelian defect group をもつ、G の p-block とすると、B に属する任意の irred. FG-module は algebraic。

これらの予想に対する例としては、$G=SL(2,2^n)$ のときは、以上で述べた通りです。B が cyclic defect group をもつときは、明らかに成立します。G が solvable の場合にも、今やっている所で注意深い確かめが必要ですが、やはり予想は正しいようです。ほかにも幾つかの場合について、調べてみましたが、すべて成立するようです。(fours group を Sylow 2-subgroup にもつ群の principal 2-block、A_7 の non-principal 2-block、A_6 の principal 3-block など)

予想の一般的な証明は、まったく手の届かない所にあるように見えます。しかし、多分この話を機会に、だれか、この状況を解決してくれるか、さもなくば、多分どこか他に類似した現象を探す人が現われるでしょう。そうしてこそ、この

話が価値あるものとなりましょう。

終りに、irreducibly generated indecomposable module について。次の様に、一般的に定義します。

定義：irreducible modules の tensor 積に現われる、indecomposable な直和因子。

Question：Green ring の中で、これらの張る部分環は半単純か？　その次元は？

例：$G = GL(3,2)$　$|G| = 168$, $p = 2$。

$\mathcal{R}$: irred. gen. indecomp. modules の張る環

$\cup$

$\mathcal{P}$: projective modules の張る環

このとき、　$\mathcal{R}/\mathcal{P} \cong \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$。